E-ISSN: 3115-7602

Strategic Studies in Financial Management and Insurance

www.ssfmi.ir

Fin. Strat. Mgmt. Ins. Vol. 1, No. 1 (2024) 30–38.

Paper Type: Original Article

Perspective of Stochastic Optimal Control Problems on the Analysis and Investigation of Financial Issues

Ayatollah Yari[1,*], Yousef Edrisi-Tabriz[1]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Payam Noor University, Tehran, Iran; Ayari@pnu.ac.ir; Yousef_edrisi@pnu.ac.ir.*

Citation:

Yari, A., & Edrisi-Tabriz, Y. (2025). Perspective of stochastic optimal control problems on the analysis and investigation of financial issues. *Strategic studies in financial management and insurance, 1*(1), 30-38.

Received: 01/08/2023 Reviewed: 25/10/2023 Revised: 08/11/2023 Accepted: 11/01/2024

Abstract

Purpose: Because in today's real world, financial and economic management issues are imbued with noise and chaos for whatever reason, from the point of view of mathematical analysis, these types of issues can be studied under the title of optimization problems, but controlling chaos or random noise is one of the most important topics of discussion for every mathematical researcher and economist. Therefore, in this article, we try to examine this discussion of financial management from the perspective of optimal stochastic control.

Methodology: In this section, the fundamentals of dynamic programming, inverse evolution, Dynkin's formula, and finally the Hamilton-Jacobi-Bellman method are used.

Findings: Because in optimal control problems, the goal is to find a control to create a suitable and optimal path so that the objective or cost function reaches its best possible form, this article attempts to examine financial management issues from its important dimensions, meaning that which components play a role in the control role are identified, the remaining parts are formatted accordingly, and a corresponding dynamic system is created.

Originality/Value: In this article, we present economic and financial issues in the form of stochastic optimal control problems. From a mathematical perspective, to find the solution, we establish a value function based on the boundary conditions of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. By taking the derivative with respect to the variables, we arrive at a system of equations that depends only on the time variable. Finally, we obtain the solutions using methods such as Bernoulli or Riccati. By substituting these solutions into the value function and its derivative with respect to the path, we can find the optimal control function.

Keywords: Financial issues, Optimal control, Dynamic programming, Stochastic control, Stochastic differential equations.

Corresponding Author: Ayari@pnu.ac.ir https://doi.org/10.22105/ssfmi.v1i1.90

Licensee. **Strategic Studies in Financial Management and Insurance**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

مطالعات راهبردی در مدیریت مالی و بیمه

دوره ۱، شماره (۱)، (۱۴۰۳)، ۳۸-۳۰

www.ssfmi.ir

نوع مقاله: پژوهشی

دیدگاه مسایل کنترل بهینه تصادفی در مورد تحلیل و بررسی مسایل امور مالی

آیت‌اله یاری[۱،*]، یوسف ادریسی تبریز[۱]

[۱]گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: چون در دنیای واقعی امروزه، مسایل مربوط به مدیریت مالی و اقتصادی به هر دلیلی آغشته از نویزها و آشفتگی است که از نظر تحلیل ریاضی این نوع مسایل را می‌توان تحت‌عنوان مسایل بهینه‌سازی مورد بررسی قرار داد ولی کنترل آشفتگی یا نویزهای تصادفی برای هر محقق ریاضی و اقتصاددان از اهمیت‌ترین موضوع بحثی آن‌ها است. لذا در این مقاله سعی بر این است که این بحث مدیریت امور مالی را از دیدگاه کنترل بهینه تصادفی مورد بررسی قرار دهیم.

روش‌شناسی پژوهش: در این قسمت از مبانی اصل برنامه‌ریزی پویا، تکامل معکوس، فرمول دینکین و نهایتا از روش هامیلتون-ژاکوبی-بلمن استفاده شده است.

یافته‌ها: چون در مسایل کنترل بهینه، هدف یافتن کنترلی جهت پیدایش مسیر متناسب و بهینه است تا اینکه تابع هدف یا هزینه به بهترین شکل ممکن خود برسد لذا در این مقاله سعی شده است تا مسایل مدیریت مالی از ابعاد مهم آن بررسی شود بدین معنی که کدام مولفه‌ها در نقش کنترل ایفای نقش می‌کنند آن‌ها را شناخته و بقیه قسمت‌ها را متناسب با آن‌ها قالب‌بندی کرده و سیستم دینامیکی متناظر ایجاد خواهند شد.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: در این مقاله مسایل اقتصادی و مالی را در قالب مسایل کنترل بهینه تصادفی مطرح کرده و از دیدگاه ریاضی برای پیدا کردن جواب، یک تابع ارزشی را بر مبنای ساختاری شرایط مرزی معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن پایه‌گذاری می‌کنیم و با مشتق‌گیری نسبت به متغیرها، به‌دستگاه معادلاتی که فقط وابسته به متغیر زمان است، می‌رسیم و نهایتا با استفاده از روش‌های مانند برنولی یا ریکاتی جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم و با جایگذاری این جواب‌ها در تابع ارزش و مشتق از آن نسبت به مسیر می‌توان تابع کنترل بهینه را پیدا کرد.

کلیدواژه‌ها: مسایل امور مالی، کنترل بهینه، برنامه‌ریزی پویا، کنترل تصادفی، معادلات دیفرانسیل تصادفی.

۱- مقدمه

در دنیای پیچیده امروز، مسایل مالی و اقتصادی یکی از مهم‌ترین چالش‌های جوامع مختلف به شمار می‌آید. بسیاری از تصمیم‌گیری‌های اقتصادی و مالی تحت‌تاثیر عدم‌قطعیت و نویزهایی هستند که از عوامل مختلف به‌وجود می‌آیند [1]. در این راستا، استفاده از ابزارهای ریاضی و مدل‌سازی‌های پیشرفته برای بهینه‌سازی تصمیمات مالی اهمیت فراوانی دارد. یکی از این ابزارها، تئوری کنترل بهینه تصادفی است که به بررسی سیستم‌های دینامیکی تحت شرایط تصادفی و عدم‌قطعیت می‌پردازد [2]. کنترل بهینه تصادفی به‌عنوان یک زیرشاخه از تئوری کنترل، به دنبال یافتن راه‌حل‌های بهینه برای مسایلی است که در آن‌ها عدم‌قطعیت یا نویزهای احتمالی نقش دارند. این روش‌ها به‌ویژه در حوزه‌های اقتصادی، مالی و سرمایه‌گذاری کاربرد زیادی دارند. به‌طور خاص، در مسایل مالی، این روش‌ها می‌توانند برای بهینه‌سازی تخصیص دارایی‌ها، مدیریت ریسک و طراحی استراتژی‌های سرمایه‌گذاری استفاده شوند [3].

در این تحقیق، به بررسی و حل مسایل مالی از دیدگاه کنترل بهینه تصادفی پرداخته می‌شود. هدف اصلی این تحقیق، مدل‌سازی و تحلیل مسایل مالی از طریق معادلات دیفرانسیل تصادفی در چارچوب کنترل بهینه است. این تحقیق به دنبال ارایه روش‌هایی برای بهینه‌سازی تصمیمات مالی در زمان‌های پیوسته و با توجه به عدم‌قطعیت‌های موجود در بازارهای مالی است. این مقاله در ۵ بخش خلاصه شده است. در بخش ۲ مطالبی در مورد مسایل مالی ریاضی آورده می‌شود. کنترل بهینه تصادفی در بخش ۳ بیان خواهد شد. روش پیشنهادی در بخش ۴ و ارایه مثال‌ها و حل آن‌ها در بخش ۵ قابل‌ملاحظه است و نهایتا نتیجه و جمع‌بندی مطالب در بخش ۶ عنوان می‌شود.

۲- مطالبی در مورد مسایل مالی ریاضی

۲-۱- ریاضی مالی

ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی و مرتبط با بازارهای مالی است. موضوع آن رابطه نزدیکی با مبانی اقتصاد مالی دارد که با بسیاری از تئوری‌ها در ارتباط است. ریاضیات مالی، مدل‌های ریاضی مبتنی بر تعهدات فکری، اقتصاد مالی را توسعه می‌دهد [4]. به‌عنوان مثال یک اقتصاددان مالی بر روی دلایل ساختاری و ایجابی قیمت سهام یک شرکت متمرکز می‌شود در حالی‌که یک ریاضیدان مالی، قیمت سهام را به‌عنوان داده در نظر می‌گیرد و همیشه در تلاش است که با استفاده از حسابان تصادفی[1]، ارزش واقعی مشتقات آن سهام را به‌دست آورد.

۲-۲- مدل‌سازی مالی

مدل‌سازی مالی یکی از موارد مهم در امور مالی است که به تحلیلگران و سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا در تصمیم‌گیری‌های خود بهتر عمل کنند. در دنیای امروز، جایی که بازارها تحت‌تاثیر عوامل متعدد اقتصادی، سیاسی و اجتماعی قرار دارند، مدل‌سازی مالی به ابزاری ضروری بدل شده است [5]. این فرایند نه‌تنها به تحلیل داده‌ها و پیش‌بینی روندها کمک می‌کند، بلکه به تجزیه‌وتحلیل ریسک و ارزیابی فرصت‌های سرمایه‌گذاری نیز می‌پردازد. مدل‌سازی مالی به ما این امکان را می‌دهد که سناریوهای مختلف را شبیه‌سازی کنیم و تاثیرات تغییرات متغیرهای کلیدی را بر نتایج مالی پیش‌بینی کنیم. مدل‌سازی مالی دارای فرایندی است که در آن الگوریتمی از واقعیت‌های مالی و اقتصادی ایجاد می‌شود. این مدل‌ها به محققان و سرمایه‌گذاران کمک می‌کنند تا وضعیت مالی یک شرکت، پروژه یا بازار را تحلیل و پیش‌بینی کنند [6]. مدل‌سازی مالی معمولا از داده‌های تاریخی و فرضیات مختلف برای شبیه‌سازی آینده استفاده می‌کند. نمونه بارز در این قسمت فرایند وینر است که در آن از مدل‌سازی حرکت براونی استفاده می‌شود. در مبحث امور مالی برای زمان پیوسته، متغیرهای حالت در معادلات دیفرانسیل تصادفی، معمولا ثروت یا ارزش شبکه را نشان می‌دهد و کنترل‌ها همان سهم‌های هستند که در هر زمان ارزش‌گذاری می‌گردند. با فرض داشتن تخصیص سرمایه‌ای که در هر زمان انتخاب می‌گردد. میزان تغییرات در سرمایه معمولا متغیر تصادفی است که باید به‌صورت سپرده‌ای همراه با نرخ سود بدون ریسکی سرمایه‌گذاری شود.

۳- کنترل بهینه تصادفی

۳-۱- کنترل بهینه

مسایل کنترل بهینه در حالت کلی از چهار جزء اصلی تشکیل می‌یابند و با توجه به ساختار دینامیکی و تابع هدف در دو گروه دسته‌بندی می‌شود.

فضای حالت: مجموعه‌ای که بردار وضعیت $x(t) \in R^n$ در آن قابل تعریف است. هر مولفه آن می‌تواند کمیتی پارامتری مانند فیزیک، شیمیایی و اقتصادی باشد.

فضای کنترل: مجموعه مقادیر مجاز برای بردار ورودی $u(t) \in U \subseteq R^m$ است. کنترل‌ها معمولا ورودی‌های خارجی یا تصمیماتی هستند که بر سیستم اعمال می‌شود تا بتواند سیستم متناظر را به اهداف مطلوب برساند.

[1] Stochastic Calculus (SC)

معادلات دینامیکی: روابط دیفرانسیلی که روند تکاملی حالت را بیان می‌کند به‌صورت

$$\dot{x} = f(t, x, u), x(t_0) = x_0, \quad (۱)$$

که در آن تابع $f: [t_0, t_f] \times R^n \times U \to R^n$ تعیین‌کننده رفتار سیستم است. برحسب نوع کاربردی می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد و در مدل‌های پیچیده ممکن است تاخیری، جزیی و تصادفی مطرح شود و برحسب نیازمندی جهت تضمین جواب و حتی یکتایی آن، ممکن است شرایط نیمه پیوستگی و یا لیپشیتس را داشته باشد.

تابع هدف یا عملکرد: برای ارزیابی کیفیت کنترل معیاری به‌صورت ترکیبی از هزینه‌های لحظه‌ای و هزینه نهایی به‌صورت

$$Z(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x, u)dt + \psi(x_f), \quad (۲)$$

تعریف می‌شود که در آن $L(t, x, u)$ نشان‌دهنده هزینه، انرژی مصرفی و یا هر معیار منفی دیگر در هر لحظه زمانی است. $\psi(x_f)$ هزینه یا پاداش وابسته به وضعیت نهایی سیستم را نشان می‌دهد. بسته به نوع مساله می‌تواند به‌صورت کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی مطرح شود هدف اصلی مساله کنترل بهینه این است که مسیر سیستم را که همان متغیر حالت $x(t)$ است به بهترین وجه و کنترل‌شده پیدا کند تا **معادله (۲)** به بهترین مقدار خود برسد.

۱-۱-۳- کنترل بهینه قطعی

در این دسته فرض بر این است که **معادلات دینامیکی (۱)** و **تابع هدف (۲)** از نظر ساختاری به‌صورت دقیق و با قطعیت مدل‌سازی شده باشند، به‌عبارت‌دیگر تحت‌تاثیر نویز، تغییرات تصادفی و احتمالی قرار نگیرد.

۲-۱-۳- کنترل بهینه تصادفی

مسایل کنترل بهینه تصادفی که در این تحقیق از آن استفاده می‌شوند، معمولا در زمینه‌های اقتصادی و مالی مانند مدیریت ریسک و تخصیص دارایی‌ها به‌کار می‌روند [5]. این مسایل از معادلات دیفرانسیل تصادفی[1] به‌وجود می‌آیند که در آن‌ها متغیرهای حالت و ورودی‌های کنترلی تحت‌تاثیر نویزهای تصادفی قرار دارند [6]. فرض کنید، معادله دیفرانسیل تصادفی همراه با شرط اولیه به‌صورت

$$\begin{cases} dx(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)dt + b(t, x(t), u(t))dw, \\ x(s) = y, \end{cases} \quad (۳)$$

است که در آن y بردار داده‌شده در R^n است. همچنین $x(t) \epsilon R^n$ متغیر وضعیت یا مسیر و $u(t) \epsilon U$ متغیر کنترل است. w یک فرایند وینر $f(t, x, u)$ تابع رانش و $b(t, x, u)$ تابع شدت نویز است [1]. متغیر کنترل بهینه u به صورت

$$u(t) = u\big(t, x(t)\big),$$

ارایه می‌شود و برای به حداقل رساندن شاخص، عملکرد

$$J(s, y; u) = E_{sy}\left[\int_s^T L\big(\tau, x(t), u(t)\big)d\tau + \psi\big(x(T)\big)\right], \quad (۴)$$

انتخاب می‌شود، اکنون تابع ارزش به‌صورت

$$V(s, y) = inf\left(E_{sy}\left[\int_s^T L\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)d\tau + \psi\big(x(T)\big)\right] : u\right) = J(s, y; u^*), \quad (۵)$$

[1] Stochastic Differential Equations (SDE)

ارایه می‌گردد که در آن ارزش تابع V همان حداقل هزینه قابل‌دستیابی از شرایط اولیه $x(s)=y$ است و u^* کنترل بهینه است که این حداقل هزینه را به‌دست می‌دهد. استفاده از اصل بهینگی یا برنامه‌ریزی پویا برای استخراج معادله‌ای برای حل مساله کنترل بهینه، اولین بار توسط بلمن پیشنهاد شد [3]. در اینجا جهت تفهیم مطالب چند لم قابل یادآوری است:

لم ۱- اصل برنامه‌ریزی پویا[1] [6]:

$$V(s,y)=inf\left(E_{sy}\left[\int_s^{s+h}L\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)d\tau+V\big(s+h,x(s+h)\big)\right]:u\right), \qquad (۶)$$

که در آن $x(t+h)$ توسط u از معادله دیفرانسیل تصادفی با شرایط اولیه تعیین می‌شود. حال مفهوم یک عملگر تعامل معکوس مرتبط با $x(t)$ تولیدشده توسط **معادله دیفرانسیل تصادفی (۳)** را می‌توان به‌صورت **لم ۲** مطرح کرد.

لم ۲- تکامل معکوس[2] [8]: برای هر تابع به‌اندازه کافی هموار مانند $\phi(t,x)$، اپراتور تکامل معکوس مرتبط با $x(t)$ تولیدشده توسط **معادله دیفرانسیل تصادفی (۳)** با کنترل ثابت $u(s)=v$ به صورت

$$A^v\emptyset=\ D_t\emptyset+\ f.\nabla_x\emptyset+\frac{1}{2}\,Tr(bb^TD_x^2\emptyset), \qquad (۷)$$

که در آن D_x^2V هسین از V، $Trace(bD_x^2V)=\sum_{i,j=1}^n b_{ij}V_{x_ix_j}$.

تعریف ۳- فرمول دینکین[3] [2] برای $s<t$:

$$E_{sy}\emptyset\big(t,x(t)\big)-\emptyset(s,y)=E_{sy}[\int_s^t(\emptyset_t\left(\tau,x(\tau)\right)+A(\tau)\varphi\big(\tau,x(t)\big)d\tau], \qquad (۸)$$

امروزه برای حل مساله کنترل بهینه تصادفی، مقدار مورد انتظار برای شاخص عملکرد بولزا نوع **معادله (۷)** در نظر گرفته می‌شود که در آن کنترل u در زمان t با استفاده از قانون بازخورد به‌صورت $u\big(t,x(t)\big)$ اعمال می‌شود. در برنامه‌ریزی پویا عملکرد مطلوب سیستم به‌عنوان تابعی از داده‌های اولیه در نظر گرفته می‌شود.

$$V\ (s,y)=\inf_u[J(s,y;u)], \qquad (۹)$$

با کنترل بازخورد بهینه u^* دارای این ویژگی است که برای همه (s,y):

$$V(s,y)=J(\mathrm{s},\mathrm{y};u^*).$$

با ترکیب اصل بهینگی پویا و فرمول دینکین برای تابع V معادله برای نظریه کنترل بهینه تصادفی حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial V}{\partial s}+min[L+A^uV]=\frac{\partial V}{\partial s}+min\left[L+f.D_xV+\frac{1}{2}Tr(bb^TD_x^2V)\right]=0, \qquad (۱۰)$$

که در آن $x(s)=y$، $v=u^*$، $L=L(s,y,v),f=f(s,y,v)$ و $b=b(s,y,v)$.

۴- روش پیشنهادی

برای حل مساله از طریق کنترل بهینه تصادفی ابتدا فرض می‌کنیم $V(t,x)$ جواب معادله دیفرانسیل جزیی

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+H(t,x,D_xV,D_x^2V)=0,\\ V(T,x)=g(x),\end{cases} \qquad (۱۱)$$

---

[1] Principle of dynamic programming
[2] Reverse evolution
[3] Dynkin

باشد که آن را معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن[1] می‌گویند و H تابع هامیلتونی به صورت

$$H(s,y,D_xV,D_x^2V)=\min\{\left[L+f.D_xV+\frac{1}{2}Tr(bb^TD_x^2V)\right]:u\}, \quad (۱۲)$$

معرفی می‌شود. **معادله (۱۱)** سنگ بنای حل مسایل کنترل بهینه تصادفی است که ارتباط بین تابع ارزش $V(t,x)$ و کنترل بهینه $u^*=u(t,x)$ را مشخص می‌کند. حل این معادله به‌طور کلی ساده نیست و برای حل آن نیازمند روش‌های عددی مانند تقریب با چندجمله‌ای است. **معادله دیفرانسیل جزیی و غیرخطی (۱۱)**، شرط لازم برای بهینگی را ایجاد می‌کند و حل تحلیلی آن را برای موارد خاص ممکن می‌سازد. در هر حال ابتدا مسایل کنترل بهینه تصادفی تحت شرایطی به معادله HJB به‌عنوان یک معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی منتقل می‌شوند. سپس این معادله از طریق روش جداسازی متغیرها و با حدس زدن یک جواب از طریق شرط انتهایی آن برای تابع ارزش$V(t,x)$ حل می‌شود. بر این اساس کنترل بهینه به‌صورت $u^*(.)$ مشتق می‌شود. درواقع شکل تابع ارزش با حدس زدن از شرط مرزی معادله HJB تعیین می‌شود. قرار دادن این عبارت در معادله HJB یک معادله دیفرانسیل معمولی را به‌دست می‌آوریم و با حل آن، جواب کنترل بهینه تصادفی و در نهایت متغیر حالت به‌دست می‌آیند. فرض کنید تابع ارزش در حالت کلی به فرم

$$V(t,x)=P(t)G(x)+K(t), \quad (۱۳)$$

باشد. با اعمال شرط مرزی داریم $V(T,x)=P(T)G(x)+K(T)$ که در آن با فرض $P(T)\neq 0$ می‌توان تابع تک متغیره $G(x)$ را به صورت

$$G(x)=\frac{g(x)-K(T)}{P(T)}=\alpha g(x)-\beta, \quad (۱۴)$$

به‌دست آورد که در آن $\beta=\frac{K(T)}{P(T)}$,$\alpha=\frac{1}{P(T)}$. با جایگذاری **معادله (۱۴)** در **معادله (۱۳)** می‌توان آن را به‌صورت

$$V(t,x)=\alpha P(t)g(x)+K(t)-\beta P(t), \quad (۱۵)$$

نوشت و قابل‌ملاحظه است که تابع ارزش بر مبنای ساختاری شرایط مرزی معادله HJB پایه‌گذاری می‌شود. نهایتا با محاسبه مشتقات جزیی و جایگذاری آن‌ها در **معادله (۱۱)** به معادله

$$\alpha\dot{P}g+\dot{K}-\beta\dot{P}+\min\{L+\alpha fPg^{'}+\frac{\alpha}{2}Tr(bb^TPg^{''})\}=0, \quad (۱۶)$$

تبدیل می‌شود ولی با توجه به ساختار توابع L,f **معادله (۱۶)** به‌صورت عوامل متشکل از $P,\dot{P},K,\dot{K}$ ، ضرایب چندجمله‌ای پایه‌ای خواهند شد که با صفر قرار دادن این ضرایب به‌دستگاه معادلات به شکل

$$\begin{cases}\dot{P}(t)+F\big(t,P(t)\big)=0,\\ \dot{K}(t)+G\big(t,K(t)\big)=0,\end{cases} \quad (۱۷)$$

در می‌آیند که فقط بر حسب متغیر t ظاهر شده‌اند و برحسب نوع ساختاری معادله می‌توان آنر از نظر تحلیلی با روشهای مانند انتگرال‌گیری یا معادله برنولی و یا معادله ریکاتی حل کرد و نهایتا با جایگذاری جواب‌های **معادله (۱۷)** در **معادله (۱۳)** می‌توان متغیر کنترل را از رابطه

$$u^*(t)=-\frac{dV}{dx}=U(t,\nabla_xV,\nabla_x^2V). \quad (۱۸)$$

۵- مثال‌های عددی و حل آن‌ها

مثال: فرض کنید تابع هزینه به‌صورت

$$Z(s,y;u)=E_{sy}[\int_0^1\left(\frac{7}{2}x^2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)\right)dt+\frac{1}{2}x^2(1),$$

[1] Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

دارای معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل

$$\dot{x}(t) = 3x(t) + u(t) + 4\dot{w}(t),$$

باشد. برای وضعیت فوق می‌توان تابع هامیلتون را به‌صورت

$$H(t,x,D_xV,D_x^2V) = \min_{u\in U}\left\{(3x+v)\frac{\partial V}{\partial x} + 8\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}v^2\right\} = 3x\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 8\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{7}{2}x^2,$$

به‌دست آورد که با انتخاب $v = -\frac{\partial V}{\partial x}$ به کنترل بهینه دست می‌یابد. در نتیجه معادله HJB به صورت

$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial t} + 3x\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 8\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{7}{2}x^2 = 0,\\ V(1,x) = \frac{1}{2}x^2,\end{cases}$$

است. برای حل معادله HJB از طریق جداسازی متغیرها و با حدس اولیه تابع ارزش به‌صورت $V(t,x) = P(t)x^2 + K(t)$ که با مشتق‌گیری از آن نسبت به متغیرهای t,x و جایگذاری آن‌ها در معادله HJB به معادله دیفرانسیل می‌رسیم که ضرایب آن‌ها چندجمله‌ای‌های پایه هستند.

مشتقات جزیی:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \dot{P}x^2 + \dot{K}, \frac{\partial V}{\partial x} = 2Px,$$

جایگذاری در HJB:

$$\dot{P}x^2 + \dot{K} + 3x(2Px) - \frac{1}{2}(2Px)^2 + 8(2P) + \frac{7}{2}x^2 = 0,$$

بعد از مرتب کردن برحسب چندجمله‌ای‌های پایه‌ای خواهیم داشت:

$$(\dot{P} + 6P - 2P^2 + \frac{7}{2})x^2 + \dot{K} + 16P = 0,$$

با صفر قرار دادن ضرایب معادله فوق نهایتا به سیستم معادله دیفرانسیل معمولی

$$\begin{cases}\dot{P}(t) + 6P(t) - 2P^2(t) + 3.5 = 0,\\ \dot{K}(t) + 16P(t) = 0,\\ P(1) = 0.5,\\ K(1) = 0,\end{cases}$$

خواهیم رسید که در آن شرایط مرزی $P(1), K(1)$ از شرط مرزی معادله HJB حاصل می‌شود. بعد از حل آن، جواب‌ها برای $P(t)$ و $K(t)$ به‌دست می‌آیند و نهایتا تابع ارزشی$V(t,x)$ برابر است با

$$P(t) = \frac{1}{2}\frac{(7-3e^{8t-8})}{1+3e^{8t-8}}, K(t) = 8\ln\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{8t-8}\right) - 56t + 56,$$

$$V(t,x) = \frac{1}{2}\frac{(7-3e^{8t-8})}{1+3e^{8t-8}}x^2 + 8\,ln\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{8t-8}\right) - 56t + 56$$

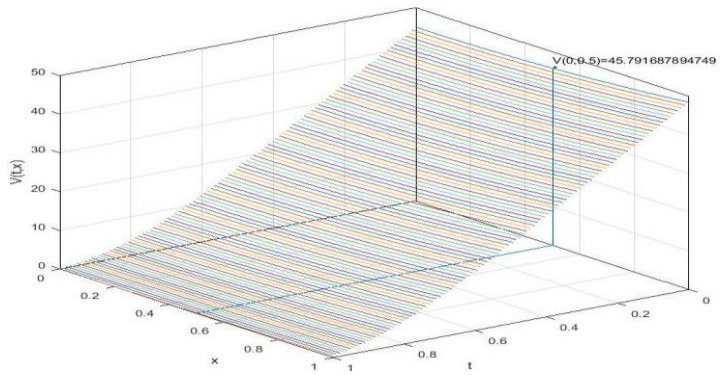
با گرفتن مشتق جزیی $V(t,x)$ نسبت به x، قانون کنترل حاصل می شود:

$$u^*(t,x) = -\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = \frac{(3e^{8t-8}-7)x}{1+3e^{8t-8}}.$$

نمودارهای تابع $V(t,x)$ و متغیر کنترل بهینه $u(t,x)$ به ترتیب در **شکل‌های ۱** و **۲** نشان داده شده‌اند و نمودار مولفه‌های تابع ارزش به ترتیب در **شکل‌های ۳** و **۴** قابل‌ملاحظه هستند. همچنین جواب واقعی عملکرد شاخص کارایی به‌صورت

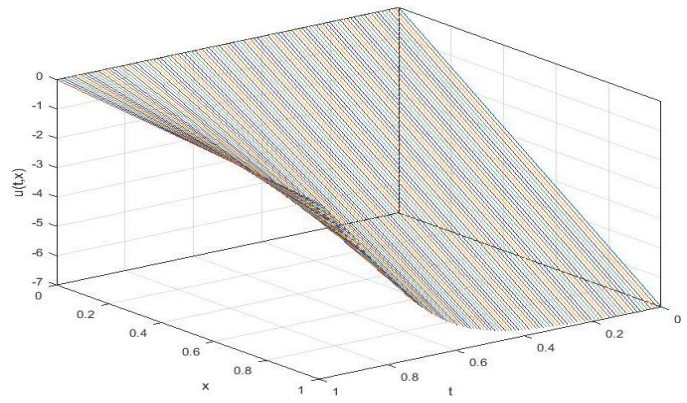
$$J^* = V(0,0.5) = 45.79168678947490.$$

حاصل می‌شود.



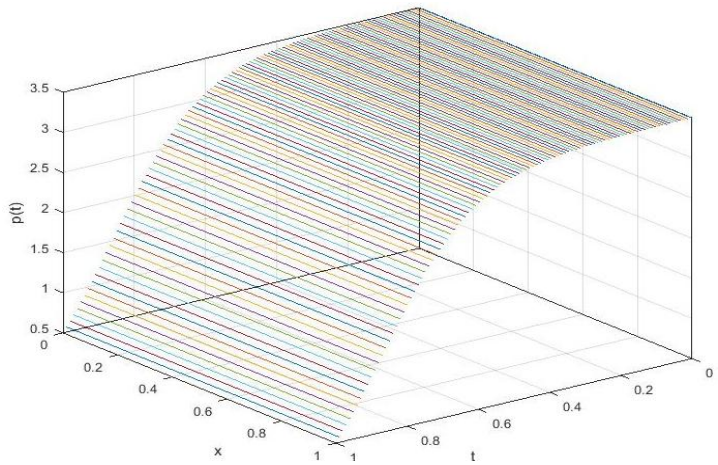
شکل ۱- نمودار تابع ارزشV برحسب زمان و مسیر حالت.

Figure 1- Diagram of the value of V over time and state path.



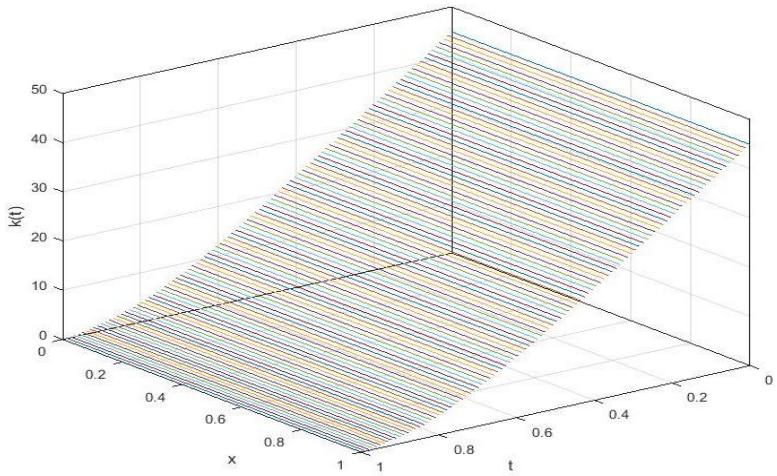
شکل ۲- نمودار تابع کنترل u برحسب زمان و مسیر حالت.

Figure 2- Diagram of the control function u in terms of time and state path.



شکل ۳- نمودار تابع P(t) برحسب زمان.

Figure 3- Graph of the function P(t) over time.



شکل ۴- نمودار k(t) برحسب زمان.
Figure 4- Graph of k(t) versus time.

۶- نتیجه و جمع‌بندی مطالب

مقدار عددی تابع ارزش از نظر ریاضی همان مقدار انتظار از شاخص کارایی برای عبارت زوجی ($x(s)$ و s) برآورده شده است و در **شکل ۱** قابل‌ملاحظه است که ساختار این روش به انتخاب تابع ارزش وابسته است و این تابع ارزشی یک تابع دو متغیره است که در آن متغیرها شرایط جداسازی را دارند. استفاده از مشتقات جزیی و قرار دادن آن‌ها در معادله HjB، نهایتا به یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی می‌رسیم که با استفاده از روش‌های مطرح در حل معادلات دیفرانسیل قابل‌حل هستند.

تشکر و قدردانی

از تمام افرادی که در فرایند نگارش مقاله کمک کرده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نماییم.

منابع مالی

در انجام این مقاله از هیچ سازمانی، بودجه یا کمک هزینه دریافت نشده است.

تعارض با منافع

بنده و همکارم اعلام می‌داریم که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، همکارم به‌عنوان نویسنده دوم، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. ما تضمین می‌کنیم که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلا چاپ‌نشده و در حال حاضر تحت انتشار نیست.

منابع

[1] Merton, R. C. (1975). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Stochastic optimization models in finance* (pp. 621–661). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-780850-5.50052-6

[2] Oksendal, B. (1985). Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations: An introduction with applications* (pp. 38–50). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-13050-6_5

[3] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations* (Vol. 43). Springer Science & Business Media. https://www.maths.dur.ac.uk/users/andrew.l.allan/projects_2024/Stochastic_Controls.pdf

[4] Hull, J. C. (2014). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education. https://www.amazon.de/-/en/Options-Futures-Other-Derivatives-John/dp/0133456315

[5] Albosaily, S., & Pergamenchtchikov, S. M. (2024). Stochastic control methods for optimization problems in Ornstein-Uhlenbeck spread models. *Journal of mathematical analysis and applications*, *530*(2), 127668. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127668

[6] Fontana, C., Pavarana, S., & Runggaldier, W. J. (2023). A stochastic control perspective on term structure models with roll-over risk. *Finance and stochastics*, *27*(4), 903–932. https://doi.org/10.1007/s00780-023-00515-z

[7] Yong, J. (2004). Stochastic optimal control—A concise introduction. *Mathematical control & related fields*, *12*(4), 1039–1136. https://doi.org/10.3934/mcrf.2020027

[8] Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (1975). *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer Berlin. https://www.amazon.de/Deterministic-Stochastic-Optimal-Control-Fleming/dp/3540901558

[9] Fleming, W. H., & Soner, H. M. (2006). *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/0-387-31071-1_2

[10] Fuhrman, M., & Tessitore, G. (2004). Existence of optimal stochastic controls and global solutions of forward-backward stochastic differential equations. *SIAM journal on control and optimization*, *43*(3), 813–830. http://doi.org/10.1137/S0363012903428664